Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение средняя общеобразовательная школа № 1

Реферат

Тема: «Математические софизмы».

Выполнила: ученица 9 А класса
Грабар Е. М.
Проверила: учитель математики
Подолянская Н. В.

г. Хабаровск 2012г.

Содержание.

Введение.

1.1 **Математические софизмы.**

(Fallacies)

Наверняка, каждый человек хоть раз в жизни слышал подобную фразу: «Дважды два равно пяти» или хотя бы: «Два равно трем». На самом деле, таких примеров можно привести очень много, но что все они обозначают? Кто их выдумал? Имеют ли они какое-нибудь логическое объяснение или же это лишь вымысел?

Именно эти вопросы я хочу рассмотреть в своей работе, название которой - математические софизмы. Неслучайно я выбрала именно математические софизмы (хотя бывают и логические, и словесные). Они, как мне кажется, более интересны, имеют четкое логическое объяснение, кроме того, с математическими софизмами мы встречаемся намного чаще, чем с обычными. Само понятие математических софизмов предполагает несколько видов софизмов, ведь в математические можно включить и алгебраические, и геометрические, и простейшие арифметические.

2.1 Понятие софизма.

Софи́зм — ложное умозаключение, которое, тем не менее, при поверхностном рассмотрении кажется правильным. Софизм основан на преднамеренном, сознательном нарушении правил логики. Это отличает его от паралогизма и апории, которые могут содержать непреднамеренную ошибку либо вообще не иметь логических ошибок, но приводить к явно неверному выводу.

Математический парадокс можно определить как истину, настолько противоречащую нашему опыту, интуиции и здравому смыслу, что в нее трудно поверить даже после того, как мы шаг за шагом проследим все ее доказательство. Математическим софизмом принято называть не менее удивительные утверждения, в доказательствах которых в отличие от доказательства парадоксов кроются незаметные, а подчас и довольно тонкие ошибки. В любой области математики — от простой арифметики до современной теоретико-множественной топологии — есть свои псевдодоказательства, свои софизмы. В лучших из них рассуждения с тщательно замаскированной ошибкой позволяют приходить к самым невероятным заключениям. Ошибкам в геометрических доказательствах Евклид посвятил целую книгу, но до наших дней она не дошла, и нам остается лишь гадать о том, какую невосполнимую утрату понесла из-за этого элементарная математика.

2.2 Экскурс в историю.

Софистами называли группу древнегреческих философов 4-5 века до н.э., достигших большого искусства в логике. В период падения нравов древнегреческого общества(5 век) появляются так называемые учителя красноречия, которые целью своей деятельности считали и называли приобретение и распространения мудрости, вследствие чего они именовали себя софистами. Наиболее известна деятельность старших софистов, к которым относят Протагора из Абдеры, Горгия из Леонтип, Гиппия из Элиды и Продика из Кеоса. Но суть деятельности софистов много больше, чем простое обучение искусству красноречия. Они обучали и просвещали древнегреческий народ, старались способствовать достижению нравственности, присутствия духа, способности ума ориентироваться во всяком деле. Но софисты не были учеными. Умение, которое должно было быть достигнуто с их помощью, заключалось в том, что человек учился иметь в виду многообразные точки зрения. Основным направление деятельности софистов стала социально-антропологическая проблема. Они рассматривали самопознание человека, учили сомневаться, но все же, это очень глубокие философские проблемы, которые стали основой для мыслителей Европейской культуры. Что касается самих софизмов, то они стали как бы дополнением к софистике в целом, если рассматривать ее как истинно философское понятие.

Исторически сложилось, что с понятием софизма связывают идею о намеренной фальсификации, руководствуясь признанием Протагора, что задача софиста- представить наихудший аргумент как наилучший путем хитроумных уловок в речи, в рассуждении, заботясь не об истине, а об успехе в споре или о практической выгоде. Там не менее, в Греции софистами называли и простых ораторов.

Известнейший ученый и философ Сократ поначалу был софистом, активно участвовал в спорах и обсуждениях софистов, но вскоре стал критиковать учение софистов и софистику в целом. Такому же примеру последовали и его ученики (Ксенофонт и Платон). Философия Сократа была основана на том, что мудрость приобретается с общением, в процессе беседы. Учение Сократа было устным. Кроме того, Сократа и по сей день считают самым мудрым философом.

Что касается самих софизмов, то, пожалуй, самым популярным на тот момент в Древней Греции был софизм Евбулида: «Что ты не терял, ты имеешь. Рога ты не терял. Значит у тебя рога». Единственная неточность, которую возможно было допустить, то это - двусмысленность высказывания. Данная постановка фразы является нелогичной, но логика возникла намного позже, благодаря Аристотелю, поэтому, если бы фраза строилась так: «Все, что ты не терял. . .», то вывод стал бы логически безупречным.

Подобных софизмов действительно очень много, но хотелось бы больше всего разобрать некоторые математические софизмы, которые наиболее популярны и известны.

Первый софизм чрезвычайно элементарен. Как-то раз хозяину одной великолепной гостиницы с бесконечным, но счетным числом номеров, ни один из которых не был свободен, нужно было принять нового гостя. Хозяин вышел из положения очень просто: каждого из своих постояльцев он переселил в комнату, номер которой был на единицу больше номера прежней комнаты, в результате чего обитатель n-й комнаты переехал в $(n + 1)$-ю и освободил для нового гостя самую первую комнату. Как может поступить хозяин, если прибудет бесконечное множество новых гостей? Ничуть не смущаясь, хозяин переселяет всех своих прежних постояльцев в комнаты с вдвое большими номерами (гость из комнаты 1 переезжает в комнату 2, гость из комнаты 2 — в комнату 4, гость из комнаты 3 — в комнату 6, гость из комнаты 4 — в комнату 8 и т. д.) и размещает вновь прибывших в освободившихся комнатах с нечетными номерами.

Но так ли необходимо хозяину иметь счетное число комнат для того, чтобы разместить новых гостей? В приведенных ниже стишах, взятых из одного английского журнала, выходившего в прошлом веке, рассказывается о хитром хозяине гостиницы, сумевшем разместить в девяти номерах десять гостей так, что каждому из них досталось по отдельной комнате.

Их было десять чудаков,
Тех спутников усталых,
Что в дверь решили постучать
Таверны «Славный малый».

— Пусти, хозяин, ночевать,
Не будешь ты в убытке,
Нам только ночку переспать,
Промокли мы до нитки.

Хозяин тем гостям был рад,
Да вот беда некстати:
Лишь девять комнат у него
И девять лишь кроватей.

— Восьми гостям я предложу
Постели честь по чести,
А двум придется ночь проспать

Двух первых путников пока,
Чтоб не судили строго,
Просил пройти он в номер «А»
И подождать немного.

Спал третий в «Б», четвертый в «В»,
В «Г» спал всю ночь наш пятый,
В «Д», «Е», «Ж», «З» нашли ночлег
С шестого по девятый.

Потом, вернувшись снова в «А»,
Где ждали его двое,
Он ключ от «И» вручить был рад
Десятому герою.

Хоть много лет с тех пор прошло,
Неясно никому,
Как смог хозяин разместить

В одной кровати вместе.

Лишь он сказал, и сразу крик,
От гнева красны лица:
Никто из всех десятерых
Не хочет потесниться.

Как охладить страстей тех пыл,
Умерить те волненья?
Но старый плут хозяин был
И разрешил сомненья.

Гостей по одному.

Иль арифметика стара,
Иль чудо перед нами,
Понять, что, как и почему,
Вы постарайтесь сами.

2.3 Алгебраические софизмы

Примером более тонкого математического софизма служит следующее «алгебраическое» доказательство того, что любое число a равно меньшему числу b.

Начнем с равенства

$$a = b + c.$$

Умножив обе его части на $a - b$, получим

$$a^2 - ab = ab + ac - b^2 - bc.$$

Перенесем ac в левую часть:

$$a^2 - ab - ac = ab - b^2 - b\text{e}$$

и разложим на множители:

$$a(a - b - c) = b(a - b - c).$$

Разделив обе части равенства на $a - b - c$, найдем

$$a = b,$$

Что и требовалось доказать.

Много неприятностей подстерегает того, кто неосторожно обращается с мнимой единицей *i* (квадратным корнем из -1). Об этом свидетельствует хотя бы следующее удивительное «доказательство»
равенства 1 = -1:

$$\sqrt{-1} = \sqrt{-1},$$
$$\sqrt{\frac{1}{-1}} = \sqrt{\frac{-1}{1}},$$
$$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}},$$
$$\sqrt{1}\cdot\sqrt{1} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1},$$
$$1 = -1.$$

2.4 Геометрические софизмы

В планиметрии большая часть ошибочных доказательств связана с использованием неправильных чертежей. Рассмотрим, например, удивительное «доказательство» того, что площадь лицевой стороны многоугольника, вырезанного из бумаги, отличается от площади оборотной стороны того же многоугольника. Это «доказательство» придумано врачом-психиатром Л. Восбургом Лионсом, в нем используется один любопытный принцип, открытый П. Керри.

Прежде всего начертим на листке бумаги в клетку треугольник, площадь которого равна 60 клеткам (рис. 1), и разрежем его вдоль прямых, показанных на верхнем рисунке. Перевернув части треугольника на другую сторону и составив из них треугольник, изображенный на рис. 1 в середине, мы обнаружим,

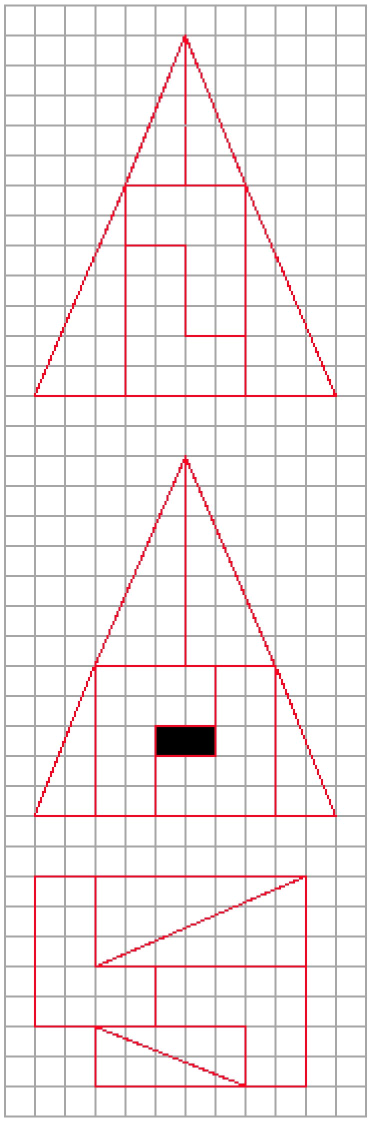

Рис. 1. Треугольник Керри.

что в центре нового треугольника появилась дырка площадью в 2 клетки. Иначе говоря, суммарная площадь частей исходного треугольника при переворачивании уменьшилась до 58 клеток! Перевернув еще раз (лицевой стороной вверх) лишь три части исходного треугольника, мы сможем составить из всех шести частей фигуру, изображенную на рис 1 внизу. Ее площадь равна 59 клеткам. Что-то здесь не так, это ясно, но что именно?

2.5 Логические софизмы

Теория вероятностей изобилует правдоподобными, но логически не безупречными рассуждениями. Предположим, что вы встретились со своим другом и что каждый из вас носит галстук. Вы начинаете спорить о том, чей галстук дороже, и в конце концов решаете пойти в магазин, где были куплены галстуки, и узнать, сколько стоит каждый из них. Тот, кто выиграет (чей галстук окажется дороже), по условию пари должен отдать свой галстук проигравшему, чтобы смягчить горечь поражения.

Вы рассуждаете так: «Шансы выиграть и проиграть у меня одинаковые. Выиграв, я обеднею на сумму, равную стоимости моего галстука. Проиграв, я получу более дорогой галстук. Следовательно, заключив пари, я окажусь в более выгодном положении, чем мой приятель».

Разумеется, ничто не мешает вашему другу рассуждать точно так же. Могут ли обе стороны, заключившие пари, иметь преимущество друг перед другом?

Один из наиболее впечатляющих парадоксов топологии заключается в том, что тор (поверхность бублика), если его поверхность растягивать (не разрывая при этом), можно вывернуть наизнанку через любую сколь угодно малую дырочку. Никакой проблемы здесь нет. Но уж если тор действительно можно вывернуть наизнанку, то следует обратить внимание и еще на один, пожалуй, даже более замечательный факт.

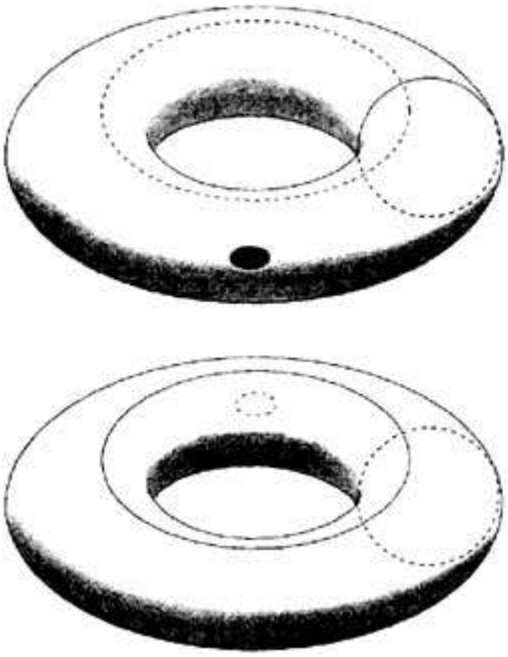

Рис. 2. Если тор вывернуть наизнанку, то кажется, что кольца, нарисованные на его поверхности, расцепляются.

На наружной стороне тора проведем меридиан (рис. 2, вверху). На внутренней стороне того же тора проведем параллель. Обе эти окружности, очевидно, сцеплены между собой. Вывернем теперь тор наизнанку через дырочку в его поверхности. Как видно из нижнего рисунка, первая окружность перейдет с наружной поверхности тора внутрь, а вторая — наружу, и обе окружности окажутся расцепленными! Очевидно, что это нарушает фундаментальный топологический закон, который гласит: разделить две сцепленные замкнутые кривые можно, лишь разорвав одну из кривых и протащив через место разрыва вторую.

В последнем софизме, заимствованном из элементарной теории чисел, речь пойдет о сравнительных достоинствах «интересных» чисел. Разумеется, числа могут представлять интерес с различных точек зрения. Число 15 873 если его умножить сначала на любую цифру, то есть на любое из чисел от 1 до 9, а затем на 7, то результат будет состоять из повторений выбранной для первого умножения цифры. Еще более удивительными свойствами обладает число 142 857: умножая его на числа от 1 до 6, вы будете получать циклические перестановки одних и тех же шести цифр.

Возникает вопрос: существуют ли неинтересные числа? С помощью элементарных рассуждений нетрудно доказать, что неинтересных чисел нет. Если бы скучные числа существовали, то все числа можно было бы разбить на два класса: интересные числа и неинтересные, скучные числа. Во множестве неинтересных чисел нашлось бы одно число, которое было бы наименьшим из всех неинтересных чисел. Но наименьшее из всех неинтересных чисел — это уже число само по себе интересное. Поэтому мы должны были бы изъять его из множества неинтересных чисел и перевести в другое множество. В оставшемся множестве в свою очередь нашлось бы наименьшее число. Повторяя этот процесс достаточно долго, можно сделать интересным любое неинтересное число.

Заключение

О математических софизмах можно говорить бесконечно много, как и о математике в целом. Изо дня в день рождаются новые парадоксы, некоторые из них останутся в истории, а некоторые просуществуют один день. Софизмы есть смесь философии и математики, которая не только помогает развивать логику и искать ошибку в рассуждениях. Буквально вспомнив, кто же такие были софисты, можно понять, что основной задачей было постижение философии. Но тем не менее, в нашем современном мире, если и находятся люди, которым интересны софизмы, в особенности математические, то они изучают их как явление только со стороны математики, чтобы улучшить навыки правильности и логичности рассуждений.

Понять софизм как таковой (решить его и найти ошибку) получается не сразу. Требуются определенный навык и смекалка. Что касается меня, то некоторые софизмы приходилось разбирать по нескольку раз, чтобы действительно в них разобраться, некоторые же наоборот, казались очень простыми. Развитая логика мышления поможет не только в решении каких-нибудь математических задач, но еще может пригодиться в жизни.

Исторические сведения о софистике и софистах помогли мне разобраться, откуда же все-таки началась история софизмов. По началу, я думала, что софизмы бывают исключительно математические. Причем в виде конкретных задач, но, начав исследование в этой области, я поняла, что софистика-это целая наука, а именно математические софизмы - это лишь часть одного большого течения.

Исследовать софизмы действительно очень интересно и необычно. Порой сам попадаешься на уловки софиста, на столь безукоризненность его рассуждений. Перед тобой открывается какой-то особый мир рассуждений, которые поистине кажутся верными. Благодаря софизмам и парадоксам можно научится искать ошибки в рассуждениях других, научится грамотно строить свои рассуждения и логические объяснения. Если есть желание, то можно стать искусным софистом, добиться исключительного мастерства в искусстве красноречия или просто на досуге проверить свою смекалку.